

ÁLGEBRA LINEAL Y MATEMÁTICA DISCRETA, 2018-2019. DIAGONALIZACIÓN

1. Estudiar si la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 3 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 5 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 7 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

2. Demostrar que para cualquier $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ matriz triangular (superior o inferior) sus autovalores son los elementos de la diagonal. ¿Es A siempre diagonalizable? (AYUDA: considera la matriz $A = (a_{ij}) \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ con todos los elementos nulos salvo $a_{12} = 1$).
3. Demostrar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene los autovalores $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 1, y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad algebraica 2.

- (i) Encontrar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $D = P^{-1} A P$.
 - (ii) Determinar la matriz A^{28} utilizando el apartado anterior.
4. Estudiar si las siguientes matrices son diagonalizables y, en caso afirmativo, indicar las matrices diagonales que se pueden obtener a partir de las matrices dadas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Demostrar que $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ es invertible si y solo si 0 NO es autovalor de A .
6. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Entonces, se pide:
 - a) Calcular los autovalores de la traspuesta de A (A^t).
 - b) Calcular los autovalores y autovectores de A^2, A^3, \dots, A^k ($k \in \mathbb{N}$).
 - c) Calcular los autovalores y autovectores de A^{-1} .
 - d) Si A es diagonalizable, ¿son A^t, A^2 ó A^{-1} diagonalizables? Razona tus respuestas y en caso afirmativo calcula sus diagonalizaciones.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Estudiar cuándo A es diagonalizable (en función del signo de $a^2 + 4b$).

8. Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y sólo si $b = 0$.

9. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha \\ 3 & 0 & \beta \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

¿Para qué valores de α y β es A diagonalizable? En los casos en los que A sea diagonalizable calcular P y D .

10. Diagonaliza, si es posible, las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

11. Hallar los autovalores y los autoespacios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

Indicar si es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcular una matriz diagonal D y una matriz de cambio de base P que cumpla $P^{-1}AP = D$.

12. Estudiar si la siguiente matriz es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcular A^n :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

13. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R}).$$

¿Es diagonalizable A ? Razonar la respuesta y si es posible calcular una matriz diagonal D , indicando qué matriz de cambio de base P se utiliza.

14. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

Calcular los valores propios y vectores propios de A ¿es diagonalizable sobre \mathbb{R} ? Razonar la respuesta y, si es posible, indicar D y P .

15. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R}).$$

Calcular el polinomio característico y los valores propios (reales) de A . ¿Es A diagonalizable? Razonar la respuesta y si es posible calcular una matriz diagonal D e indicar una matriz P inversible que cumpla $P^{-1}AP = D$. Calcular A^{99} (sin realizar el producto directamente).

16. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R}).$

¿Es diagonalizable A ? Razonar la respuesta y, si es posible, calcular una matriz diagonal D y la matriz de cambio de base P que se emplea para obtener dicha matriz D .

17. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

¿Es diagonalizable A ? Razona tu respuesta y, si es posible, calcula una matriz diagonal D semejante a A y la matriz de cambio de base P que estás empleando para obtener dicha matriz D .

18. Consideremos la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (i) Calcular los valores propios de A y su multiplicidad algebraica.
- (ii) ¿Es diagonalizable? Razonar la respuesta.
- (iii) Calcular si es posible una matriz inversible P y una matriz diagonal D que cumplan $P^{-1}AP = D$.
- (iv) Calcular la potencia A^{100} .

19. Determinése los autovalores y autovectores de los siguientes endomorfismos dados por:

- $f(x, y, z) = (2y + 2z, 2x - z, -x - y)$
- $g(x, y) = (-3x + 4y, 4x + 3y)$
- $h(x, y, z) = (x, 2x + 2y + 2z, -x + y + 3z)$

20. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de un espacio vectorial V_3 y sea f una aplicación lineal de V_3 a V_3 dado por:

$$f(u_1) = u_1, f(u_2) = u_1 - 2u_2, \text{Ker } f = L[u_2 - u_3]$$

Se pide:

- La matriz de f respecto de la base B
- La imagen de f y su dimensión
- El polinomio característico y los autovalores de f
- Una base B' respecto de la cual la matriz de f es diagonal
- La matriz del cambio de base de B a B'